

### Extensions algébriques de corps - TD 9

Nous rappelons que les racines du polynôme  $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$  sont les nombres complexes  $e^{2k\pi i/n} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

1. Si  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\sqrt{n}$  et  $\sqrt{ni}$  sont algébriques sur  $\mathbb{Q}$ .
2. Si  $z \in \mathbb{C}$  est une racine de l'unité, montrer que  $z$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$ .
3. Calculer  $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$  et donner une base de  $\mathbb{Q}(a)$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel pour :
  - (i)  $a = \sqrt{3}$ .
  - (ii)  $a = \sqrt[3]{2}$ .
  - (iii)  $a = \sqrt[4]{2}$ .
  - (iv)  $a = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
  - (v)  $a = \sqrt{3}i$ .
4. Calculer  $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}]$  et donner une base de  $\mathbb{Q}(a, b)$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel pour :
  - (i)  $a = \sqrt{3}$  et  $b = \sqrt{2}$ .
  - (ii)  $a = \sqrt{3}$  et  $b = i$ .
  - (iii)  $a = \sqrt[3]{2}$  et  $b = \sqrt{2}$ .
  - (iv)  $a = \sqrt[3]{2}$  et  $b = i$ .
  - (v)  $a = \sqrt[4]{2}$  et  $b = \sqrt{2}$ .
  - (vi)  $a = \sqrt[4]{2}$  et  $b = i$ .
  - (vii)  $a = e^{2\pi i/3}$  et  $b = \sqrt{2}$ .
  - (viii)  $a = e^{2\pi i/3}$  et  $b = i$ .
  - (ix)  $a = \sqrt{3}i$  et  $b = \sqrt{3}$ .Dans tous les cas ci-dessus, montrer que  $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$ .  
Quand est-ce que  $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(ab)$ ?
5. Soit  $K/F$  et  $a, b \in K$ . Si  $a$  est algébrique sur  $F$  et  $b$  est algébrique sur  $F(a)$ , alors  $b$  est algébrique sur  $F$ .
6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Trouver les polynômes minimaux de  $\sqrt{n}$  et de  $\sqrt{ni}$  sur  $\mathbb{Q}$ .
7. Soit  $z \in \mathbb{Q}(i)$ . Montrer que  $z$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et trouver son polynôme minimal.
8. Soient  $\rho_1, \rho_2$  les racines d'un polynôme de degré 2 dans  $\mathbb{Q}[x]$ . Montrer que  $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2) = \mathbb{Q}(\rho_1)$  et calculer  $[\mathbb{Q}(\rho_1) : \mathbb{Q}]$ .
9. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $f_m(x) := x^3 - m \in \mathbb{Q}[x]$ . Soient  $a_m, b_m, c_m \in \mathbb{C}$  les racines de  $f_m(x)$ , et soit  $F_m := \mathbb{Q}(a_m, b_m, c_m)$ .
  - (i) Montrer que  $F_1 = \mathbb{Q}(\omega)$  où  $\omega := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ;
  - (ii) Montrer que  $[F_1 : \mathbb{Q}] = 2$  ;
  - (iii) Calculer  $[F_m : \mathbb{Q}]$  selon la valeur de  $m$  (*indication : il faut distinguer 2 cas*). Dans chaque cas, donner une base de  $F_m$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.